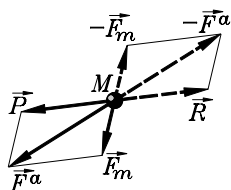


Dalamberov princip za tačku

U cilju proučavanja kretanja neslobodne tačke Dalamber je formulisao princip koristeći termin “izgubljene sile” \vec{P} . Ova sila tački ne saopštava ubrzanje već je potrebna da uravnoteži dejstvo veze na tačku. Njegova formulacija principa glasi



$$\vec{P} + \vec{R} = 0,$$

gde je \vec{R} - dopunska sila koja je posledica postojanja veze (reakcija veze). Pri tome je

$$\vec{P} + \vec{F}_m = \vec{F}^a,$$

gde je za \vec{F}_m korišćen termin motorne sile, a sa \vec{F}^a je označena rezultanta svih aktivnih sila koje deluju na posmatranu tačku. Kako

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{F}^a - \vec{F}_m + \vec{R} = 0,$$

i uzimajući da je $\vec{F}_m = m\vec{a}$, dobija se

$$\vec{F}^a + (-m\vec{a}) + \vec{R} = 0.$$

Ova jednačina razlikuje se od jednačine ravnoteže sistema sučeljnih sila za član $-m\vec{a}$ koji ima dimenziju sile i koja se naziva inercijalna sila (u Dalamberovom smislu), a obeležava se sa \vec{F}^{in} , tj. $\vec{F}^{in} = -m\vec{a}$. Sledi da je

$$\vec{F}^a + \vec{F}^{in} + \vec{R} = 0,$$

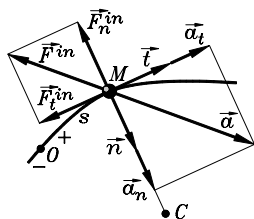
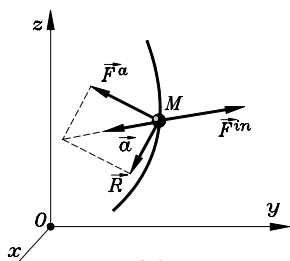
što predstavlja savremenu formulaciju Dalamberovog principa za neslobodnu tačku, koji glasi: ako se u svakom trenutku aktivnim silama i reakcijama veza koje deluju na tačku pridoda sila inercije, vektorski zbir tih sila biće jednak nuli.

Odgovarajuće skalarne diferencijalne jednačine su:

$$X^a + R_x + X^{in} = 0, \quad X^{in} = -ma_x = -m\ddot{x},$$

$$Y^a + R_y + Y^{in} = 0, \quad Y^{in} = -ma_y = -m\ddot{y},$$

$$Z^a + R_z + Z^{in} = 0, \quad Z^{in} = -ma_z = -m\ddot{z}.$$



$$\begin{aligned} F_t^a + R_t + F_t^{in} &= 0, & F_t^{in} &= -ma_t = -m\ddot{s}, \\ F_n^a + R_n + F_n^{in} &= 0, & F_n^{in} &= -ma_n = -m\frac{\dot{s}^2}{R_K}, \\ F_b^a + R_b + F_b^{in} &= 0, & F_b^{in} &= 0. \end{aligned}$$

Prethodni sistemi jednačina samo su formalno slični uslovima ravnoteže tačke, jer je u statici reč o algebarskim jednačinama, a u ovom slučaju u pitanju su diferencijalne jednačine.

Dalamberov princip za materijalni sistem

Neka je dat materijalni sistem koji se sastoji od n tačaka, odgovarajućih masa m_i , $i=1,2,\dots,n$. Koristeći princip oslobađanja od veza, spoljašnje i unutrašnje veze mogu se zameniti odgovarajućim reakcijama veza. Tada materijalni sistem postaje slobodan, a na i - tu reprezentativnu tačku deluju spoljašnje sile \vec{F}_i^s (aktivne sile i spoljašnje

reakcije veza) i unutrašnje sile \vec{F}_i^u . Ako se tim silama pridodaju i inercijalne $\vec{F}_i^{in} = -m_i \vec{a}_i$, tada, na osnovu Dalamberovog principa, za svaku tačku sistema važi

$$\vec{F}_i^s + \vec{F}_i^u + \vec{F}_i^{in} = 0.$$

Sabiranjem jednačina koje važi za svaku tačku, dobija se

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^s + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^u + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{in} = 0, \quad \vec{F}_R^s + \vec{F}_R^{in} = 0,$$

gde je: $\vec{F}_R^s = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^s$ - glavni vektor spoljašnjih sila, $\vec{F}_R^{in} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{in}$ - glavni vektor sila

inercije, a glavni vektor unutrašnjih sila je $\vec{F}_R^u = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^u = 0$. Predhodna jednačina

predstavlja prvu vektorsku jednačinu Dalamberovog principa za vezani sistem.

Ako su položaji tačaka sistema određeni vektorima položaja \vec{r}_i , u odnosu na pol O , tada je

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^s + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^u + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{in} = 0, \quad \vec{M}_O^s + \vec{M}_O^{in} = 0,$$

gde je: $\vec{M}_O^s = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^s$ - glavni moment svih spoljašnjih sila, $\vec{M}_O^u = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^u = 0$ i

$\vec{M}_O^{in} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{in}$ - glavni moment sila inercije svih tačaka sistema. Predhodna jednačina predstavlja drugu vektorsku jednačinu Dalamberovog principa za vezani sistem.

Ako se u izabranom polu O postavi Dekartov koordinatni sistem $Oxyz$, tada se projektovanjem na ose dobija

$$\begin{aligned} X_R^s + X_R^{in} &= 0, & M_{Ox}^s + M_{Ox}^{in} &= 0, \\ Y_R^s + Y_R^{in} &= 0, & M_{Oy}^s + M_{Oy}^{in} &= 0, \\ Z_R^s + Z_R^{in} &= 0, & M_{Oz}^s + M_{Oz}^{in} &= 0. \end{aligned}$$

Poređenjem prve i druge vektorske jednačine Dalamberovog principa, $\vec{F}_R^s + \vec{F}_R^{in} = 0$ i $\vec{M}_O^s + \vec{M}_O^{in} = 0$, sa jednačinama koje izražavaju teoremu o kretanju centra masa i teoremu o promeni kinetičkog momenta u odnosu na nepokretni pol ili centar masa, $\dot{\vec{K}} = m\vec{a}_C = \vec{F}_R^s$ i $\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O^s$, dobija se

$$\vec{F}_R^{in} = -\vec{F}_R^s = -m\vec{a}_C = -\dot{\vec{K}}, \quad \vec{M}_O^{in} = -\vec{M}_O^s = -\dot{\vec{L}}_O,$$

tj., glavni vektor sila inercije sistema jednak je inercijalnoj sili centra masa, odnosno, negativnom izvodu po vremenu količine kretanja sistema, a glavni moment sila inercije sistema u odnosu na nepokretni pol ili centar masa jednak je negativnom izvodu po vremenu kinetičkog momenta sistema u odnosu na isti pol.